

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

3. Klausur

9. Mai 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Vormittag | Zone C Nachmittag

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 24]

In dieser Aufgabe sollen Sie die Anzahl und Art der Schnittpunkte des Graphen von $y = \log_a x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ und der Geraden $y = x$ für bestimmte Werte von a untersuchen.

Bei dieser Aufgabe können Sie entweder die Formel für die Änderung der Logarithmusbasis $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ oder die Funktion „Logarithmus zu einer beliebigen Basis“ eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) verwenden.

Die Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \log_a x \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1.$$

- (a) Betrachten Sie die Fälle $a = 2$ und $a = 10$. Skizzieren Sie in ein und demselben Koordinatensystem die folgenden drei Graphen:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y = x.$$

Beschriften Sie jeden Graphen deutlich mit seiner Gleichung und geben Sie den Wert jeden von Null verschiedenen x -Achsenabschnitts an.

[4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie in den Teilen (b) und (c) den Fall $a = e$. Beachten Sie, dass $\ln x \equiv \log_e x$.

- (b) Verwenden Sie die Infinitesimalrechnung, um den Minimalwert des Ausdrucks $x - \ln x$ zu finden, und zu begründen, dass es sich bei diesem Wert um einen Minimalwert handelt. [5]
- (c) Deduzieren Sie daraus, dass $x > \ln x$ gilt. [1]
- (d) Es existieren Werte von a für die der Graph von $y = \log_a x$ und die Gerade $y = x$ Schnittpunkte aufweisen. Die folgende Tabelle enthält drei Intervalle für den Wert von a .

Intervall	Anzahl der Schnittpunkte
$0 < a < 1$	p
$1 < a < 1,4$	q
$1,5 < a < 2$	r

Untersuchen Sie den Graphen von $y = \log_a x$ für unterschiedliche Werte von a , und notieren Sie die Werte von p , q und r . [4]

In den Teilen (e) und (f) sei $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Im Intervall $1,4 \leq a \leq 1,5$ gibt es einen Wert von a so, dass die Gerade $y = x$ eine Tangente an den Graphen von $y = \log_a x$ in einem Punkt P ist.

- (e) Finden Sie die genauen Koordinaten von P und den genauen Wert von a . [8]
- (f) Notieren Sie die genauen Werte für a so, dass die Graphen von $y = \log_a x$ und $y = x$
 - (i) zwei Schnittpunkte haben; [1]
 - (ii) keinen Schnittpunkt haben. [1]

2. [Maximale Punktzahl: 31]

In dieser Aufgabe sollen Sie lineare und quadratische Funktionen untersuchen, die systematisch mit Hilfe von arithmetischen Folgen (AF) konstruiert werden.

Betrachten Sie die Funktion $L(x) = mx + c$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $m, c \in \mathbb{R}$ und $m, c \neq 0$.

$r \in \mathbb{R}$ sei die Lösung von $L(x) = 0$.

Wenn m, r und c , in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge bilden, dann wird $L(x)$ als AF-lineare Funktion bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $L(x) = 2x - 1$ eine AF-lineare Funktion ist. [2]

Betrachten Sie wieder $L(x) = mx + c$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $r = -\frac{c}{m}$. [1]

(ii) $L(x)$ sei eine AF-lineare Funktion. Zeigen Sie unter dieser Voraussetzung, dass $L(x) = mx - \frac{m^2}{m+2}$. [4]

(iii) Geben Sie alle weiteren Einschränkungen für den Wert von m an. [1]

Es gibt nur drei **ganzzahlige** Wertetripel für m, r und c , die jeweils eine AF-lineare Funktion ergeben. Eine davon ist $L(x) = -x - 1$.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse von Teil (b) zur Bestimmung der beiden anderen AF-linearen Funktionen mit ganzzahligen Werten von m, r und c . [3]

Betrachten Sie die Funktion $Q(x) = ax^2 + bx + c$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ seien die Lösungen von $Q(x) = 0$.

(d) Notieren Sie einen Ausdruck für

(i) die Summe $r_1 + r_2$, der Lösungen, abhängig von a und b . [1]

(ii) das Produkt $r_1 r_2$, der Lösungen, abhängig von a und c . [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Wenn a, r_1, b, r_2 und c , in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge bilden, dann wird $Q(x)$ als AF-quadratische Funktion bezeichnet.

(e) $Q(x)$ sei eine AF-quadratische Funktion.

(i) Notieren Sie einen Ausdruck für $r_2 - r_1$ in Abhängigkeit von a und b ; [1]

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Antworten auf die Teile (d)(i) und (e)(i), dass

$$r_1 = \frac{a^2 - ab - b}{2a}; \quad [2]$$

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Teil (e)(ii), dass $b = 0$ oder $a = -\frac{1}{2}$ gilt. [3]

Betrachten Sie nun den Fall $b = 0$.

(f) Bestimmen Sie die beiden AF-quadratischen Funktionen, die diese Bedingung erfüllen. [5]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -\frac{1}{2}$.

(g) (i) Finden Sie einen Ausdruck für r_1 abhängig von b . [2]

(ii) Bestimmen Sie damit oder auf andere Weise die genauen Werte von b und c so, dass sich AF-quadratische Funktionen ergeben.

Geben Sie Ihre Antworten in der Form $\frac{-p \pm q\sqrt{s}}{2}$ an, mit $p, q, s \in \mathbb{Z}^+$. [5]

Quellenangaben:

© International Baccalaureate Organization 2023